カレーライスの作り方

takasuke

平成 23 年 8 月 18 日

まえがき

カレーライスの構成法を記した文章は多いが、あまり厳密に記したものはない。まずカレーライスの定義も然ることながら、その構成に通常必須とされる食材も定義は不明確であり、通常の方針での厳密な構成は容易くは無い。そこでここでは、白米のみをアプリオリに与えられたものと考えた上で、丼もの達から成る集合に入る構造を調べ、それらに対して特定の性質を満たす食べ物としてカレーライスを定義し、簡単な場合に構成を行う。

目 次

第1章　直感的丼集合

まず“ 丼もの達から成る集合 ”に入る構造を考える。この章であつかう言葉は厳密に定義されたものではないが、最終的に用いるべき性質を挙げるので、そのような性質を満たす集合を考えることで、公理的集合論の枠組みの中で考えることができる。これは次の章で扱うことにして、まずはこの章で直感的に考えられる“ 丼もの達から成る集合 ”の性質を考える事にする。

1.1　直感的丼集合の“ 定義 ”

この章では、食べ物全体の集合を考える。この集合は「(読者にとって) 食べられるもの全体」として直感的に扱ってもよいし、また「食べられる」の基準が違う人と共に扱う際には、ある店を固定して、その店のメニュー全体として扱っても問題ない。ただし白米は食べ物であるとする。また、空集合は食べ物であると考える。

またこの章では、さらに食べ物を用いて定義される、“ 丼もの全体の集合 ”を考える。ひとまずは、「食べ物dが丼ものである」とは「dは白米に食べ物をかけた物が丼に入ったものである」という事であると直感的に考えて話をすすめる。ただし、以下のものも議論の便宜上、(形式的に) 丼ものであると認める。

1. 空集合。これは丼に入っていない唯一の丼ものである。以下ではこれを空丼と呼ぶ。
2. 同じ丼ものを有限個並べたもの。つまり、「牛丼3丁」を一つの丼ものとして扱うことを認める。
3. 同じ丼ものを負の個数並べたもの。つまり、「牛丼-3丁」も、一つの丼ものとして扱うことを認める。

4. 以上のものたちを並べたもの。つまり、「牛丼2丁と親子丼 -3 丁」も、一つの丼ものとして扱うことを認める。

これに対して、「同じ丼ものを有限個並べたもの」たちを並べたものは、正の丼もの、と呼ばれる。当然、正の丼ものは丼ものである。

注意 1 例えば「牛丼2丁と親子丼 -3 丁」は正の丼ものではないが、「牛丼2丁と親子丼4丁」は正の丼ものである。

この章を通して、“ 丼もの全体の集合 ”を D で表し、丼集合と呼ぶ。

$$D := \{\text{丼もの全体の集合}\} \tag{1.1}$$

また、“ 正の丼もの全体の集合 ”を D_+ で表し、正丼集合と呼ぶ。

$$D_+ := \{\text{正の丼もの全体の集合}\} \tag{1.2}$$

1.2　直感的丼集合の性質

丼集合Dの持つ性質を考える。

1.2.1　白米の丼性

以下で扱う丼は十分大きい物を考え、また白米は丼に入れるものと約束する。白米を（数量は問わず）一つの丼に入れたものを h と書く。「数量は問わず」とは、次の小節で述べるように、一つの丼に入った白米ならば、量がちがっても同一視して、それらを h で表す、ということである。同様に、丼ものたちは（かかっている食べ物の量が違えば区別するが、）白米の量によっては区別しない事にする。

注意 2 白米が一つの丼に入っていればその数量は考えないというのは、日本人の「白米ならいくらでも食える」という性質に準じた考え方である。従って、この約束は海外の方には不自然に思えるかも知れない。ちなみに、著者は海外に丼ものという概念があるかを知らない。

白米は、白米の上に空集合がかかった丼ものである。従って丼ものであり、

$$h \in D \tag{1.3}$$

と書ける。

1.2.2　丼ものの加法

　a,b を D の元とする。$a+b$ で、単純に丼もの a と b を並べた丼ものを表す。ただし、例えば「牛丼 3 丁と牛丼 -5 丁を並べた丼もの」と「牛丼 -2 丁」は区別しない。また、例えば「牛丼 0 丁」と空丼は同一視する。さらに、並べる順序は考えない。つまり、$a+b$ と $b+a$ は区別しない。これによって、D には加法が定義される。

$$+ : D \times D \longrightarrow D \tag{1.4}$$

尚、自然数 m に対して $a \in D$ の m 個の和を ma と書く。さらに空丼を 0 と書くことにして、任意の $a \in D$ に対して

$$a + 0 = 0 + a = a \tag{1.5}$$

と約束する。

1.2.3　丼勘定

　丼ものに対して、その丼の数を勘定するという操作 $\|\cdot\|_{\text{丼}}$ が定義できる。

$$\| \cdot \|_{\text{丼}} : D \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{1.6}$$

この操作を、丼勘定と呼ぶ。

　例としては、空丼は丼を持たず、また白米 h は定義から一つの丼に入っているので、

$$\|0\|_{\text{丼}} \ = \ 0 \tag{1.7}$$
$$\|h\|_{\text{丼}} \ = \ 1 \tag{1.8}$$

となっている。また、加法の定義を考えると、任意の丼もの d,e に対して、公式

$$\|d\|_{\text{丼}} + \|e\|_{\text{丼}} = \|d + e\|_{\text{丼}} \tag{1.9}$$

が成立する。

注意 3 $d \in D$ が $\|d\|_{\text{丼}} = 0$ であっても、d は空丼とは限らない。例えば、d として「牛丼 3 丁と親子丼 -3 丁」を考えればよい。

1.2.4　ジョル丼分解と単丼分解

d を空丼でない丼ものとする。この時、明らかに、ある正の丼もの d_+,d_- として

$$d = d_+ - d_- \tag{1.10}$$

であり、かつこのようなものの中で $\|d_+ + d_-\|_{丼}$ を最小にするものが存在する。この分解を、ジョル丼分解という。

また、丼勘定が 1 である正の丼ものを、単丼ものと呼ぶ。例えば、白米 h は単丼ものである。

任意の正の丼ものは、その定義から必ず（負の数も）有限個の単丼ものの和に分解できる。この分解は並べ替えを除いて一意的である。これを正の丼ものの単丼分解と呼ぶ。

1.2.5　丼ものの乗法

単丼もの同士には、周知の通り“ 掛ける ”という操作が定義される。つまり、一方の単丼ものに、もう一方の単丼ものの丼の中身をぶっ掛けて、新しい単丼ものを作る操作である。この演算を、記号 $\cdot$ で表す。この操作を、分配法則に従って D_+ の任意の二元の間の積へと拡張した演算

$$\begin{aligned} \cdot : D_+ \times D_+ &\longrightarrow D_+ \\ (d, e) &\longmapsto d \cdot e \end{aligned} \tag{1.11}$$

を、正の丼ものの乗法と呼ぶ。つまり、d,e の単丼分解を $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$ 及び $e = \sum_{j=1}^{m} e_j$ とすると、上記の単丼もの同士の掛け算 $\cdot$ を用いて

$$d \cdot e = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_i \cdot e_j \tag{1.12}$$

と定める。また、d,e の少なくとも一方が空丼であるときには

$$d \cdot e = 0 \tag{1.13}$$

と約束し、さらに d,e が一般の丼ものであるときにも、ジョル丼分解 $d = d_+ - d_-$,$e = e_+ - e_-$ を用いて

$$d \cdot e = d_+ \cdot e_+ - d_+ \cdot e_- - d_- \cdot e_+ + d_- \cdot e_- \tag{1.14}$$

と定義することで、分配法則を保ったまま、掛け算の定義を D 全体へ拡張できる。

$$\cdot : D \times D \longrightarrow D$$

注意 4 空丼には何を掛けても空丼になる、という約束は、空集合に丼ものの中身をぶっ掛けようにもぶっ掛けようが無いという事実に対応する約束である。

尚、ここでは掛け算の順序は考えない事とする。つまり任意の D の元 d,e に対して

$$d \cdot e = e \cdot d \tag{1.15}$$

とする。

注意 5 白米は、一つの丼の中に入っている量による差異を無視すると約束していた。このため、一つの丼に入った白米 h を掛けると言う操作は、何もしないに等しい。従って、任意の丼もの d に対して

$$d \cdot h = d \tag{1.16}$$

である。

注意 6 白米の量による違いは無視をした一方で、白米の上に掛かっている食べ物の量が違えば、違う丼ものとして扱う。つまり、例えば一般の丼もの d については d と $d \cdot d$ は違う元である、といえる。

よく知られている例としては、d を白米の上に牛肉を掛けた単丼もの、e を白米の上にたまねぎを掛けた単丼ものとした時、丼もの $d \cdot e$ は牛丼と呼ばれる。 人によっては $d \cdot e \cdot d \cdot e$ を牛丼大盛り、$d \cdot e \cdot e$ をネギだく牛丼と呼ぶ。

注意 7 また、しばしば $d \cdot d$ を d^2 と書くなどの記法を用いる。

第2章　丼集合の一般化

ここでは、前節で見た丼集合の性質を抽象して、より一般化された丼集合を定義する。

2.1　丼集合

丼集合は、次のように一般化される。

定義 2.1.1 集合 S,P と S の演算 $+ : S \times S \to S$,$\cdot : S \times S \to S$、写像 $\|\cdot\|_{丼} : S \to \mathbb{Z}$ の組（S,P,$+$,$\cdot$,$\|\cdot\|_{丼}$）が（一般化された）丼集合であるとは、次の性質を満たすこととする。

(DS 1) P は S の部分集合である。

(DS 2) （S,$+$,$\cdot$）は（1 を持つ可換）環である。

(DS 3) S の演算 $+$,$\cdot$ の制限は共に P の演算となり、（P,$+$）,（P,$\cdot$）は半群となる。

(DS 4) $\|\cdot\|_{丼}$ は S から $\mathbb{Z}$ への（1 を保つ）環準同型である。

(DS 5) $\|\cdot\|_{丼}$ の制限は、（P,$+$）及び（P,$\cdot$）から（$\mathbb{N}\backslash\{0\}$,$+$）及び（$\mathbb{N}\backslash\{0\}$,$\cdot$）への半群の準同型である。

(DS 6) 任意の $d \in S \setminus \{0\}$ に対しある d_+,$d_- \in P$ として $d = d_+ - d_-$ であり、かつこのようなものの中で $\|d_+ + d_-\|_{丼}$ を最小にするものが、唯一存在する。

(DS 7) 任意の $d \in P$ に対し、P の元から成る有限列 $\{d_i\}_{i\in I}$ が（並べ替えを除いて）一意的に存在して、任意の $i \in I$ について $\|d_i\|_{丼} = 1$ かつ $d = \sum_{i\in I} d_i$ となる。

注意 8 前節で確かめたことからすぐに分かるとおり、前節で「丼集合」と読んでいた D は、定義の意味で丼集合である。以降は、単に丼集合と言えば一般化された丼集合のことを指し、前節の D を区別のため「直感的丼集合」と呼ぶ。しばしば定義の状況を指して、単に「S は丼である」という。この場合、定義の P のことを S_+ と書く。
S の元は、慣習として「丼もの」と呼ばれる。また、S の和の単位元は空丼、積の単位元は白米と呼ばれる。ジョル丼分解や単丼分解と言った用語も、しばしば流用される。

注意 9 この定義を採用することによって、公理的集合論の枠組みの中で、丼論を扱うことができる。

注意 10 丼集合の“ 直感的でない ”例としては、$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}$ 上の一変数多項式環 $\mathbb{Z}[X]$ がある。$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}_+$ を正の整数全体、$\|\cdot\|_{\text{丼}}$ を $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への恒等写像と思うことで丼となる。この丼集合を、整数丼と呼ぶ。$\mathbb{Z}[X]$ については、

$$\mathbb{Z}[X]_+ := \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f \text{ の全ての係数は正 }\} \tag{2.1}$$

として、また

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_{\text{丼}} : \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ f & \longmapsto & f(1) \end{array} \tag{2.2}$$

と置くことで、丼構造が入る。この丼集合 $\mathbb{Z}[X]$ を、$\mathbb{Z}$ 係数一変数多項式丼と呼ぶ。

2.2 丼の射

次に、丼集合の間の射を定義する。

定義 2.2.1 丼集合 S から丼集合 T への写像 f が丼の射であるとは、次の性質を満たすこととする。

(DM 1) f は S から T への環準同型である。

(DM 2) f は S_+ の丼ものを T の丼ものへ写す

(DM 3) $f|_{S_+}$ は、演算 $+$ について、半群の準同型となる。

(DM 4) $f|_{S_+}$ は、演算 $\cdot$ について、半群の準同型となる。

(DM 5) f と T の丼勘定との合成は、S の丼勘定と一致する。

2.3　丼の圏

以上から、丼の圏が定義される。

定義 2.3.1 丼の圏を、丼集合を対象、丼の射を射とする圏と定める。

注意 11 $\mathbb{Z}$ は、空集合と白米のみを食べ物として認める人にとっての直感的丼集合と、丼の圏で同型（丼同型という。）である。また $\mathbb{Z}[X]$ は、空集合と白米と生卵のみを食べ物として認める人にとっての直感的丼集合と丼同型である。この場合、$X \in \mathbb{Z}[X]$ は、丼に白米を入れたものに生卵を一個掛けた丼ものに対応する。

第3章　カレーライス

カレーライスは一般には、丼には入っていないため、丼ものであるとは言い難い。ただ、当然カレーライスは食べ物であり、従ってカレーライスは白米に食べ物を掛けたものである。
またカレーには、何を掛けてもカレーのままであるという性質がある。以上から、カレーライスは「どの（直感的な意味での）丼ものを掛けても、カレーライスのままである」という特別な性質を持つ食べ物であると考えるのが妥当であろう。この章ではこの方針に沿って、食べ物集合を定義して、その元としてのカレーライスを簡単な場合に構成する。

3.1　食べ物集合と、丼集合の食べ物集合への作用

第 1 章では「食べ物全体の集合」を直感的に用いていたが、まずはこれを一般化した丼集合の言葉を使ってしっかりと定義する。

定義 3.1.1 集合 X が丼集合 D 上の食べ物集合であるとは、次の性質を満たすこととする。

(TS 1) 集合としての D は、X の部分集合である。

(TS 2) 乗法モノイド $D^* := D\backslash\{0\}$ は、X に作用している。

(TS 3) X の部分集合としての D は、乗法モノイド D^* の作用について安定である。

(TS 4) 制限によって得られる乗法モノイド D^* の $D \subseteq X$ への作用は、D の乗法による D^* の D への作用と一致する。

注意 12 定義が正当なものである事についての直感的な説明を行う。まず、丼は食べ物では無いが、丼ものの（丼の）中身のみを考える事で、丼集合を食べ物集合の部分集合として見れる。丼集合の食べ物集合への作

用は、丼もの（の丼の中身を）食べ物にぶっ掛ける、という意味と考える。そうすると、第1章で扱っていた直感的な意味での食べ物集合が、上の定義を満足していることが分かる。

注意 13 正確には、食べ物集合とは、上の定義を満たすような集合 X と、作用 $\cdot$ の組として定義される。

注意 14 例としては、丼もの集合 D に対して、D 自身は D 上の食べ物集合となっている。これは、丼もの以外に食べ物を知らないような人にとっての直感的な食べ物集合を考えている事に対応する。

3.2　カレーライスの定義

カレーライスを、食べ物集合の元であり、どの丼ものを（前節の作用の意味で）掛けても、カレーライスのままであるという性質を持つものとして定義したい。だが、この性質を自明に満たすものとして、食べ物集合の元としての空丼がある。我々はこれをカレーライスとは認めない。

定義 3.2.1 D を丼集合、集合 X を D 上の食べ物集合とする。$c \in X$ がカレーライスであるとは、次の条件を満たすことでいう。

（CR 1） $c \neq 0\,(\in D \subseteq X)$

（CR 2） 任意の $d \in D$ に対して、$d \cdot c = c$ である。

3.3　白米からのカレーライスの構成

この節では、手元に丼と空集合と白米しかない場合のカレーライスの構成法を述べる。

この場合、直感的丼集合 D は空丼と白米 h とが生成する。先に見たとおり、この場合は丼同型の意味で、D を整数丼 $\mathbb{Z}$ と考えてよい。

よって問題は、整数丼 $\mathbb{Z}$ 上の食べ物集合で、カレーライスを含むものを構成することに帰着する。

さて、少々天下り的ではあるが、ここで次のような集合 X を考える。つまり

$$X := \left(\mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}\right) / \sim \tag{3.1}$$

ただし $(m,n) \sim (i,j)$ とは、$n{\cdot}i = m{\cdot}j$ なる事と定める。これは $(\mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\})$ 上の同値関係を定める。また (x,y) が代表する X の元を $[x;y]$ と書く。

これが整数丼上の食べ物集合となっている事を確かめる。
まず、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & [t;1] \end{array} \tag{3.2}$$

を考えると、これは明らかに単射でる。これによって整数丼 $\mathbb{Z}$ は X の部分集合と見なせる。次に、整数丼の X への作用を次のように定める。つまり $t \in \mathbb{Z}$, $[m;n] \in X$ に対して

$$t \cdot [m;n] := [t \cdot m;n] \tag{3.3}$$

と定める。この作用は、確かに X に $\mathbb{Z}$ 上の食べもの集合としての構造を定めている事が確かめられる。

さて、X の元 $[1;0]$ は、$\mathbb{Z}$ 上の食べもの集合 X のカレーライスとなっている事が確かめられる。